JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY **28**, 161–183 (1980)

Approximation durch positive lineare Spline-Operatoren konstruiert mit Hilfe lokaler Integrale

WOLFGANG A. HALANG

Universität Dortmund, D-4600 Dortmund 50, Bundesrepublik Deutschland

Communicated by Carl de Boor

Received October 6, 1978

Eine Familie positiver linearer Spline-Approximationsoperatoren bzgl. äquidistanter Partitionen wird untersucht, die unter Verwendung lokaler Integrale konstruiert werden. Die Optimalität dieser Operatoren innerhalb einer größeren Klasse ähnlich definierter Abbildungen wird gezeigt, variationsvermindernde Eigenschaften werden hergeleitet und die Approximationsfehler sowie deren Ableitungen werden in Abhängigkeit von Stetigkeitsmoduln bzw. von höheren Ableitungen in der Čebyšev-Norm abgeschätzt. Unter hinreichenden Differenzierbarkeitsvoraussetzungen konvergiert das Approximationsverfahren von der Ordnung $O(h^2)$ für alle in Frage kommenden Ableitungen, wobei h der Abstand der Partitionspunkte sei.

1. EINLEITUNG

In seiner ersten Arbeit über Spline-Funktionen [6] führte Schoenberg auf der Menge der Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die positiven linearen Operatoren $\mathscr{L}_n$, $n \in \mathbb{N}$, durch

$$\mathscr{L}_n f(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} f(i) \cdot B_n(x - i), \qquad x \in \mathbb{R},$$

ein, wobei B_n die B-Splines n-ten Grades bzgl. der Knoten $\{x_j = -(n+1)/2 + j \mid j = 0,\ldots, n+1\}$ seien. Später verallgemeinerte Schoenberg die Definition der Spline-Operatoren $\mathscr{L}_n$ auf nichtäquidistante Partitionen und zeigte, daß sie Polynome ersten Grades reproduzieren und variationsvermindernd sind [8]. Ähnliche Ergebnisse erhielten Karlin und Karon [2], die die B-Splines durch Čebyšev-Splines ersetzt haben. Schoenberg [8], Karlin und Karon [2] sowie Marsden [3] verwandten die Operatoren auch zur Approximation stetiger Funktionen und gaben entsprechende Fehlerabschätzungen an.

Im vorliegenden Artikel wollen wir uns mit ähnlichen, auf der Menge $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ der lokal integrierbaren Funktionen durch

0021-9045/80/020161-23$02.00/0

$$L_{n,h}f(x) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{1}{h} \cdot \int_{(i-1/2)\cdot h}^{(i+1/2)\cdot h} f(t)\,dt \cdot B_n\left(\frac{x}{h} - i\right), \qquad x \in \mathbb{R},$$

definierten Spline-Operatoren $L_{n,h}$, $n \in \mathbb{N}$ und $h > 0$, beschäftigen. Verallgemeinerungen dieser Operatoren auf nichtäquidistante Partitionen zur L^p-Approximation wurden bereits von Müller [5] untersucht.

Wir werden zeigen, daß die Operatoren $L_{n,h}$ ebenfalls positiv, linear und variationsvermindernd sind und Polynome ersten Grades reproduzieren. Daraus folgt nach Schoenberg [7], daß die Abbildungen $L_{n,h}$ auch die totale Variation vermindern. Für diese Eigenschaft werden wir jedoch einen direkten Beweis angeben, der nur auf den speziellen Eigenschaften der B-Splines beruht. Der Approximationsfehler in der Čebyšev-Norm bei Anwendung der Operatoren $L_{n,h}$ auf stetige und differenzierbare Funktionen wird in Abhängigkeit von h und von Stetigkeitsmoduln bzw. höheren Ableitungen angegeben. Anhand scharfer Abschätzungen der stetigen Ableitungen des Approximationsfehlers kann unter hinreichenden Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gezeigt werden, daß das Verfahren für alle entsprechenden Ableitungen jeweils von der Ordnung $O(h^2)$ konvergiert. Innerhalb einer größeren Klasse positiver linearer Spline-Operatoren, die ebenfalls mit Hilfe lokaler Integrale definiert werden, zeichnen sich die Abbildungen $L_{n,h}$ durch das beste Approximationsverhalten aus.

Als Anwendungsbeispiel sei hier die angenäherte Darstellung empirischer Zeitfunktionen genannt, wobei sich die Operatoren $L_{n,h}$ auf Grund ihrer Positivität und ihrer variationsvermindernden Eigenschaften bewährt haben. Die lokalen Integrale lassen sich direkt messen und sind relativ unempfindlich gegenüber Rauscheinflüssen, wodurch wesentlich weniger Daten zur Funktionsdarstellung als mit Hilfe von Funktionswerten erforderlich sind. In diesem Zusammenhang ist weiterhin von Bedeutung, daß alle Daten bei der Konstruktion der Spline-Funktionen gleiches Gewicht haben und ihr Einfluß, und damit auch der von Meßfehlern, nur lokal ist. Da im Gegensatz zur Interpolation und zur L^2-Approximation keine Gleichungssysteme gelöst werden müssen, eignet sich das Verfahren insbesondere, wenn sehr viele Daten gegeben sind. Schließlich sind wegen der verwendeten B-Spline-Darstellung zur Berechnung von Funktions- und Ableitungswerten jeweils nur wenige Terme zu berücksichtigen.

Bei der Durchführung der Fehlerabschätzungen in der Čebyšev-Norm werden wir jeweils nur abgeschlossene Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ betrachten. Da die Operatoren $L_{n,h}$ aber auf $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ definiert sind, setzen wir zur Konstruktion von $L_{n,h}f$ für eine Funktion $f\colon C^j(I) \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, diese in den Randpunkten von I durch die Taylorpolynome j-ten Grades fort, woraus $\|D^jf\|_{\infty,I} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(j)}(x)|$ folgt.

2. Definition und grundlegende Eigenschaften der Spline-Operatoren

Sei $n \in \mathbb{N}$ und B_n der normalisierte B-Spline n-ten Grades bzgl. der Knoten $\{-(n-1)/2 + i \mid i = 0, \ldots, n+1\}$. Dann gilt [6, 8]

(i) $B_n \in C^{n-1}(\mathbb{R})$,

(ii) $B_n(x) \geqslant 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

(iii) $\operatorname{supp} B_n = [-(n+1)/2, (n+1)/2]$,

(iv) B_n ist eine gerade Funktion,

(v) $\int_{\mathbb{R}} B_n(x)\, dx = 1$,

(vi) $\sum_{i\in\mathbb{Z}} B_n(x-i) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

(vii) $\{B_n(\cdot - i) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Basis des Raumes der Splines n-ten Grades auf $\mathbb{R}$ bzgl. der Partition $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ für gerade n bzw. $\mathbb{Z}$ für ungerade n.

Weiterhin seien $h > 0$ und die Partition $\pi := \{(i + \frac{1}{2}) \cdot h \mid i \in \mathbb{Z}\}$ von $\mathbb{R}$ gegeben. Wir verwenden durch benachbarte Knoten aus π begrenzte lokale Integrale zur Einführung der folgenden Familie von Spline-Operatoren.

Definition. Die Abbildungen $L_{n,h} : L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \to C^{n-1}(\mathbb{R})$ werden für $n \in \mathbb{N}$ und $h > 0$ definiert durch

$$s(x) = (L_{n,h}f)(x) := \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{1}{h} \cdot \int_{(i-1/2)\cdot h}^{(i+1/2)\cdot h} f(t)\, dt \cdot B_n\left(\frac{x}{h} - i\right), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Aus den Eigenschaften der Integration und den oben zitierten Aussagen (i)–(iii) folgt nun unmittelbar das

Lemma 1. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $h > 0$. Dann gilt

(i) $L_{n,h} : L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \to C^{n-1}(\mathbb{R})$ ist wohldefiniert,

(ii) $L_{n,h}$ ist linear, und

(iii) $L_{n,h}$ ist positiv. ∎

Zur Untersuchung der Konvergenz der Operatoren $L_{n,h} : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ für festes $n \geqslant 2$ und $h \to 0$ mit Hilfe des Satzes von Korovkin berechnen wir jetzt die Darstellungen der Monome π_0, π_1 und π_2 bzgl. der Basen $\{B_n(\cdot/h - i) \mid i \in \mathbb{Z}, h > 0\}$ der Spline-Räume n-ten Grades. Dazu wenden wir auf die Monome den in [1] behandelten Quasi-Interpolations-Projektor Q an:

$$(Q_{n,h}f)(x) := \sum_{i\in\mathbb{Z}} (\lambda_i f) \cdot B_n\left(\frac{x}{h} - i\right), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

mit

$$\lambda_i f = \lambda_{\tau_i,\psi_{in}} f := \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \cdot \psi_{in}^{(n-j)}(\tau_i) \cdot f^{(j)}(\tau_i) \tag{2.3}$$

und

$$\psi_{in}(x) := \frac{1}{n!} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left[\left(i - \frac{n+1}{2} + k\right) \cdot h - x\right], \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

sowie

$$\tau_i \in \left(\left(i - \frac{n+1}{2}\right) \cdot h, \left(i + \frac{n+1}{2}\right) \cdot h\right) \text{ beliebig}, \qquad i \in \mathbb{Z}. \tag{2.5}$$

Für unsere Berechnungen wählen wir $\tau_i := i \cdot h$, $i \in \mathbb{Z}$. Da alle Ableitungen von π_0 verschwinden und ψ_{in} ein Polynom n-ten Grades in x mit dem Höchstkoeffizienten $(-1)^n/n!$ ist, erhalten wir sofort $\lambda_i \pi_0 = 1$, $i \in \mathbb{Z}$. Die entsprechenden B-Spline-Koeffizienten von π_1 ergeben sich zu $\lambda_i \pi_1 = i \cdot h$, $i \in \mathbb{Z}$, da bis auf die erste alle Ableitungen von π_1 und $\psi_{in}^{(n-1)}(ih)$ verschwinden: aus $\psi_{in}^{(n-1)}(x) = (-1)^n \cdot x + ((-1)^{n-1}/n) \cdot \sum_{k=1}^{n} (i - (n+1)/2 + k) \cdot h$ folgt nämlich

$$\psi_{in}^{(n-1)}(ih) = (-1)^{n-1} \cdot h \cdot \left(-i + i - \frac{n+1}{2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right) = 0.$$

Zur Bestimmung von $\lambda_i \pi_2$ müssen wir wegen des Verschwindens der höheren Ableitungen nur noch $\psi_{in}^{(n-2)}(ih)$ berechnen, wobei wir die für $m \geqslant 1$ beliebige reelle Zahlen $\{a_1, \ldots, a_m\}$ leicht zu verifizierende Beziehung

$$\sum_{\substack{k,l=1\\k<l}}^{m} a_k a_l = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{m} a_k^2\right) \tag{2.6}$$

verwenden werden. Der Wurzelsatz von Vieta liefert uns die Darstellung

$$\begin{aligned}\psi_{in}^{(n-2)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \Bigg\{ &\frac{n!}{2} \cdot x^2 - (n-1)! \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(i - \frac{n+1}{2} + k\right) \cdot h \cdot x \\ &+ (n-2)! \cdot \sum_{\substack{k,l=1\\k<l}}^{n} \left(i - \frac{n+1}{2} + k\right)\left(i - \frac{n+1}{2} + l\right) \cdot h^2 \Bigg\}.\end{aligned}$$

Wir wenden nun obige Beziehung an und erhalten für $x = i \cdot h$

$$\begin{aligned}&\psi_{in}^{(n-2)}(ih) \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \cdot h^2 \cdot \Bigg\{ \frac{n!}{2} \cdot i^2 - (n-1)! \cdot i \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(i - \frac{n+1}{2} + k\right) \\ &\quad + \frac{(n-2)!}{2} \cdot \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \left(i - \frac{n+1}{2} + k\right)\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} \left(i - \frac{n+1}{2} + k\right)^2\right] \Bigg\}\end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} \cdot h^2 \cdot \left\{ \frac{n!}{2} \cdot i^2 - (n-1)! \cdot i \cdot \left(n \cdot i - n \frac{n+1}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \right.$$

$$+ \frac{(n-2)!}{2} \cdot \left(n \cdot i - n \frac{n+1}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$- \frac{(n-2)!}{2} \cdot \left(n \cdot i^2 + n \cdot \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 \right.$$

$$\left. \left. - 2in \frac{n+1}{2} + 2i \cdot \sum_{k=1}^{n} k - 2 \frac{n+1}{2} \sum_{k=1}^{n} k \right) \right\}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} \cdot h^2 \cdot \left\{ \frac{n!}{2} \cdot i^2 - n! \cdot i^2 + \frac{(n-2)!}{2} n^2 i^2 \right.$$

$$- \frac{(n-2)!}{2} \cdot \left(ni^2 + n \cdot \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right.$$

$$\left. \left. - 2in \frac{n+1}{2} + 2i \frac{n(n+1)}{2} - n \frac{(n+1)^2}{2} \right) \right\}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} \cdot h^2 \cdot \left\{ \left(-\frac{n!}{2} + \frac{(n-2)!}{2} n^2 - \frac{(n-2)!}{2} n \right) i^2 \right.$$

$$\left. - \frac{(n-2)!}{2} \cdot \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n}{4} (n+1)^2 \right) \right\}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n(n-1)} \cdot \frac{h^2}{2} \cdot \left\{ (-n^2 + n + n^2 - n)\, i^2 \right.$$

$$\left. - \frac{1}{12} (4n^3 + 2n^2 + 4n^2 + 2n - 3n^3 - 6n^2 - 3n) \right\}$$

$$= (-1)^{n-1} \cdot \frac{n^3 - n}{n(n-1)} \cdot \frac{h^2}{24} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{24} \cdot h^2.$$

Mit diesem Ergebnis erhalten wir schließlich

$$\lambda_i \pi_2 = (-1)^{2n} \cdot i^2 h^2 + (-1)^{n-2+n+1} \cdot \frac{n+1}{24} \cdot h^2 \cdot 2 = \left(i^2 - \frac{n+1}{12} \right) \cdot h^2, \quad i \in \mathbb{Z},$$

und können den folgenden Satz beweisen.

SATZ 1. *Seien $n \geqslant 2$, $h > 0$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Dann gilt*

(i) $L_{n,h} \pi_i = \pi_i, \qquad i = 0, 1,$

(ii) $L_{n,h}\pi_2 = \pi_2 + (n+2)/12 \cdot h^2 \cdot \pi_0$,

(iii) $L_{n,h}f$ *konvergiert gegen* f *für* $f \in C(I)$ *und* $h \to 0$.

Beweis. ad (i). Sei $i \in \mathbb{Z}$. Wegen

$$\frac{1}{h} \cdot \int_{(i-1/2)\cdot h}^{(i+1/2)\cdot h} 1\, dt = 1 = \lambda_i \pi_0$$

und

$$\frac{1}{h} \cdot \int_{(i-1/2)\cdot h}^{(i+1/2)\cdot h} t\, dt = \frac{h^2}{2h} \cdot \left[\left(i+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(i-\frac{1}{2}\right)^2\right] = i \cdot h = \lambda_i \pi_1$$

folgt die Behauptung.

ad (ii). Für den Koeffizienten des B-Splines $B_n(\cdot/h - i)$, $i \in \mathbb{Z}$, in der Darstellung von $L_{n,h}\pi_2$ gilt

$$\frac{1}{h} \cdot \int_{(i-1/2)\cdot h}^{(i+1/2)\cdot h} t^2\, dt = \frac{h^3}{3h} \cdot \left[\left(i+\frac{1}{2}\right)^3 - \left(i-\frac{1}{2}\right)^3\right] = h^2 \cdot \left(i^2 + \frac{1}{12}\right)$$

$$= h^2 \cdot \left(i^2 - \frac{n+1}{12}\right) + h^2 \cdot \frac{n+2}{12} = \lambda_i \pi_2 + h^2 \cdot \frac{n+2}{12}.$$

ad (iii). Auf Grund von (i) und (ii) gilt die Behauptung nach dem Satz von Korovkin. ∎

KOROLLAR. *Der Operator* $L_{n,h} : C(I) \to C(I)$, $n \geq 2$ *und* $h > 0$, *ist stetig und hat die Norm* 1.

Beweis. Aus $L_{n,h}\pi_0 = \pi_0$ und aus der Positivität von $L_{n,h}$ folgt

$$\| L_{n,h} \|_\infty = \| L_{n,h}\pi_0 \|_{\infty,I} = \| \pi_0 \|_{\infty,I} = 1. \quad ∎$$

3. Optimalität der Operatoren $L_{n,h}$

Wir wollen nun eine größere, die Abbildungen $L_{n,h}$ umfassende, Klasse linearer Operatoren einführen, die mehrere benachbarte lokale Integrale bzgl. der Partition π zur Konstruktion der B-Spline-Koeffizienten verwenden. Es soll untersucht werden, ob sich das Approximationsverhalten verglichen mit dem der Operatoren $L_{n,h}$ durch Hinzuziehung weiterer Daten verbessern läßt.

Seien $m \in \mathbb{N}$, $a = (a_0, ..., a_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ und

$$I_{i,h}(f) = \frac{1}{h} \cdot \int_{(i-1/2)\cdot h}^{(i+1/2)\cdot h} f(t)\, dt, \qquad i \in \mathbb{Z},\ h > 0 \text{ und } f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}).$$

Damit definieren wir die Funktionale

$$F_{i,a,h}(f) := a_0 \cdot I_{i,h}(f) + \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot (I_{i+j,h}(f) + I_{i-j,h}(f)) \tag{3.1}$$

und für $n \geqslant 2$ die linearen Abbildungen

$$(M_{n,a,h}f)(x) := \sum_{i\in\mathbb{Z}} F_{i,a,h}(f) \cdot B_n\left(\frac{x}{h} - i\right), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}). \tag{3.2}$$

Aus Symmetriegründen wurde eine ungerade Anzahl lokaler Integrale ausgewählt, deren Integrationsintervalle symmetrisch zu $i \cdot h \in \mathbb{R}$ angeordnet sind und die entsprechend gewichtet werden. Die so definierten Operatoren $M_{n,a,h}$ sind wohldefiniert. Schränken wir die Wahl von a gemäß

$$0 \leqslant a_0 \leqslant 1,\ 0 \leqslant a_j \leqslant \tfrac{1}{2},\ j = 1,\ldots, m, \text{ und } a_0 + 2 \cdot \sum_{j=1}^{m} a_j = 1 \tag{3.3}$$

ein, so sind die $M_{n,a,h}$ ebenfalls positiv und reproduzieren die Monome π_0 und π_1, denn

$$F_{i,a,h}(\pi_0) = a_0 + 2 \cdot \sum_{j=1}^{m} a_j = 1$$

und

$$\begin{aligned} &F_{i,a,h}(\pi_1) \\ &\quad = \frac{h^2}{2h} \cdot \left\{a_0 \cdot \left[\left(i + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(i - \frac{1}{2}\right)^2\right]\right. \\ &\qquad \left. + \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \left[\left(i + j + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(i + j - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(i - j + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(i - j - \frac{1}{2}\right)^2\right]\right\} \\ &\quad = \frac{h}{2} \cdot \left\{a_0 \cdot 2i + \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot 4i\right\} = i \cdot h, \qquad i \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

SATZ 2. *Seien $n \geqslant 2$ und $h > 0$. Von allen positiven linearen Operatoren $M_{n,a,h}$ mit $a_0 + 2 \cdot \sum_{j=1}^{m} a_j = 1$ wird das Monom π_2 durch $L_{n,h}\pi_2$ am besten approximiert.*

Beweis. Wir berechnen mit Hilfe der Beziehung $I_{k,h}(\pi_2) = h^2 \cdot (k^2 + \frac{1}{12})$, $k \in \mathbb{Z}$, die Koeffizienten

$$F_{i,a,h}(\pi_2) = h^2 \cdot \left\{a_0 \cdot \left(i^2 + \frac{1}{12}\right) + \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \left((i + j)^2 + \frac{1}{12} + (i - j)^2 + \frac{1}{12}\right)\right\}$$

$$= h^2 \cdot \left\{ i^2 \cdot \left(a_0 + 2 \cdot \sum_{j=1}^{m} a_j \right) + \frac{1}{12} \cdot \left(a_0 + 2 \cdot \sum_{j=1}^{m} a_j \right) + 2 \cdot \sum_{j=1}^{m} j^2 \cdot a_j \right\}$$

$$= h^2 \cdot \left\{ i^2 + \frac{1}{12} + 2 \cdot \sum_{j=1}^{m} j^2 \cdot a_j \right\}, \qquad i \in \mathbb{Z}.$$

Daraus ergibt sich für $i \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 2$ und alle kompakten Intervalle $I \subset \mathbb{R}$

$$F_{i,a,h}(\pi_2) - \lambda_i \pi_2 = h^2 \cdot \left(i^2 + \frac{1}{12} + 2 \cdot \sum_{j=1}^{m} j^2 \cdot a_j - i^2 + \frac{n+1}{12} \right)$$

$$= h^2 \cdot \left(\frac{n+2}{12} + 2 \cdot \sum_{j=1}^{m} j^2 \cdot a_j \right)$$

$$= \| M_{n,a,h}\pi_2 - \pi_2 \|_{\infty,I} . \tag{3.4}$$

Da alle a_j, $j = 1,\ldots, m$, als nichtnegativ vorausgesetzt sind, nimmt diese Norm ihr Minimum genau für $a_1 = \cdots = a_m = 0$, d.h. für $M_{n,a,h} = L_{n,h}$, an. ▌

In Abschnitt 5 werden wir sehen, daß die Approximationsgüte bzgl. π_2 entscheidend ist für das Approximationsverhalten bzgl. beliebiger stetiger Funktionen. Nach Satz 2 können wir daher feststellen, daß die $L_{n,h}$ unter den Operatoren des Typs $M_{n,a,h}$ die besten Approximationseigenschaften besitzen.

4. Variationsvermindernde Eigenschaften

In diesem Abschnitt werden wir uns mit zwei Eigenschaften der Operatoren $L_{n,h}$ beschäftigen, die insbesondere bei der Darstellung empirischer Funktionen von Bedeutung sind. Es sind dies die Variationsverminderung und die Reduktion der totalen Variation, die die glättende Wirkung der betrachteten Operatoren bei Anwendung auf mit Rauschen überlagerte experimentelle Funktionen zum Ausdruck bringen.

Satz 3. *Die Operatoren* $L_{n,h} : C(\mathbb{R}) \to C^{n-1}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$ und $h > 0$, *sind variationsvermindernd.*

Beweis. Sei $f \in C(\mathbb{R})$, dann ist zu zeigen, daß die Anzahl $S^-[f, \mathbb{R}]$ der Vorzeichenwechsel der Funktion f bzgl. ihres Definitionsbereiches $\mathbb{R}$ nicht kleiner ist als $S^-[L_{n,h}f, \mathbb{R}]$. Entsprechend sei $S^-(\{c_i\}_{i\in\mathbb{Z}})$ die Anzahl der Vorzeichenwechsel zwischen den benachbarten Gliedern einer Folge und $I_{i,h}(f) := (1/h) \cdot \int_{(i-1/2)\cdot h}^{(i+1/2)\cdot h} f(t)\, dt$, $i \in \mathbb{Z}$. Nach dem Satz von Rolle existiert für alle $i \in \mathbb{Z}$ ein $\xi_i \in ((i - \frac{1}{2}) \cdot h, (i + \frac{1}{2}) \cdot h)$ mit $I_{i,h}(f) = f(\xi_i)$. Wegen $L_{n,h}f = \sum_{i\in\mathbb{Z}} I_{i,h}(f) \cdot B_n(\cdot/h - i)$ gilt nun [2]:

$$\begin{aligned}
S^-[L_{n,h}f, \mathbb{R}] &\leqslant S^-(\{I_{i,h}(f)\}_{i\in\mathbb{Z}}) \\
&= S^-(\{f(\xi_i) | \ \xi_i \in ((i - \tfrac{1}{2}) \cdot h, (i + \tfrac{1}{2}) \cdot h)\}_{i\in\mathbb{Z}}) \\
&= S^-(\{f(\xi_i) | \ \xi_{i-1} < \xi_i < \xi_{i+1}\}_{i\in\mathbb{Z}}) \\
&\leqslant \sup_\tau S^-(\{f(\tau_i) | \ \tau_{i-1} < \tau_i < \tau_{i+1}\}_{i\in\mathbb{Z}}) \\
&= S^-[f, \mathbb{R}] \text{ per definitionem,}
\end{aligned}$$

wobei das Supremum über alle Partitionen τ von $\mathbb{R}$ zu bilden ist. ∎

Zum Beweis des nächsten Satzes und der Fehlerabschätzungen in Abschnitt 5 benötigen wir die folgende Beziehung.

LEMMA 2 (Schoenberg [6]). *Seien $\{a_i\}_{i\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $h > 0$ und $0 \leqslant j \leqslant n$. Dann lassen sich die Ableitungen der Spline-Funktion*

$$s(x) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i \cdot B_n\left(\frac{x}{h} - i\right), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

darstellen als

$$D^j s(x) = h^{-j} \cdot \sum_{i\in\mathbb{Z}} \nabla^j a_i \cdot B_{n-j}\left(\frac{x}{h} - i + \frac{j}{2}\right), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{4.2}$$

wobei ∇^j der absteigende Differenzenoperator j-ter Ordnung sei.

Wir betrachten nun $L_{n,h}$ als Abbildung von $C[a, b]$ nach $C[a, b]$ mit einem kompakten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Zur Konstruktion von $L_{n,h}f$ setzen wir f stetig auf ganz $\mathbb{R}$ fort:

$$\begin{aligned}
&:= f(a), \ x < a, \\
\hat{f}(x) &:= f(x), \ x \in [a, b], \\
&:= f(b), \ x > b,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

und definieren $L_{n,h}f := L_{n,h}\hat{f}\,|_{[a,b]}$.

SATZ 4. *Seien $n \geqslant 1$, $h > 0$ und $BV[a, b]$ der Raum reellwertiger Funktionen beschränkter Variation auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Für die Operatoren $L_{n,h}$: $C[a, b] \to C^{n-1}[a, b]$ gilt dann*

$$\operatorname*{Var}_{a,b} L_{n,h}f \leqslant \operatorname*{Var}_{a,b} f, f \in C[a, b] \cap BV[a, b]. \tag{4.4}$$

Beweis. Da $L_{n,h} f$ für $n \geqslant 1$ (stückweise) differenzierbar ist, gilt

$$\operatorname*{Var}_{a,b} L_{n,h} f = \int_a^b |d(L_{n,h}\hat{f})(t)| = \int_a^b \left| \frac{d}{dt} (L_{n,h}\hat{f})(t) \right| dt. \tag{4.5}$$

Wir wenden nun die im Beweis von Satz 3 hergeleiteten Beziehungen $I_{i,h}(\hat{f}) = \hat{f}(\xi_i)$, $\xi_i \in ((i - \frac{1}{2}) \cdot h, (i + \frac{1}{2}) \cdot h)$ und $i \in \mathbb{Z}$, sowie Lemma 2 an:

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Var}_{a,b} L_{n,h} f &= \int_a^b \left| \frac{d}{dt} \sum_{i \in \mathbb{Z}} I_{i,h}(\hat{f}) \cdot B_n \left(\frac{t}{h} - i \right) \right| dt \\
&= \int_a^b \left| \frac{d}{dt} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi_i) \cdot B_n \left(\frac{t}{h} - i \right) \right| dt \\
&= \int_a^b \left| \sum_{i \in \mathbb{Z}} (\hat{f}(\xi_i) - \hat{f}(\xi_{i-1})) \cdot \frac{1}{h} \cdot B_{n-1} \left(\frac{t}{h} - i + \frac{1}{2} \right) \right| dt \\
&\leqslant \int_a^b \sum_{i \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(\xi_i) - \hat{f}(\xi_{i-1})| \cdot \frac{1}{h} \cdot B_{n-1} \left(\frac{t}{h} - i + \frac{1}{2} \right) dt \\
&= \sum_{i \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(\xi_i) - \hat{f}(\xi_{i-1})| \cdot \frac{1}{h} \cdot \int_a^b B_{n-1} \left(\frac{t}{h} - i + \frac{1}{2} \right) dt \\
&\leqslant \sum_{i \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(\xi_i) - \hat{f}(\xi_{i-1})|,
\end{aligned}$$

nach den B-Spline-Eigenschaften (ii) und (v) und da auf Grund der Definition von $\hat{f}$ fast alle in der Summe auftretenden Funktionswertdifferenzen verschwinden. Mit

$$\xi_k := \min\{\xi_i \in (a, b) |\, i \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{und} \qquad \xi_l := \max\{\xi_i \in (a, b) |\, i \in \mathbb{Z}\}$$

folgt schließlich die Behauptung:

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Var}_{a,b} L_{n,h} f &\leqslant \sum_{i \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(\xi_i) - \hat{f}(\xi_{i-1})| \\
&= \sum_{i=k+1}^{l} |f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})| + |f(\xi_k) - f(a)| + |f(b) - f(\xi_l)| \\
&\leqslant \operatorname*{Var}_{a,b} f. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

5. Fehlerabschätzungen

Zum Abschluß wollen wir das Approximationsverhalten der Operatoren $L_{n,h}$ für $h \to 0$ untersuchen. Dazu werden wir den Approximationsfehler $L_{n,h} f - f$ und seine Ableitungen in der Čebyšev-Norm unter Verwendung höherer Ableitungen von f abschätzen. Zuvor jedoch soll mit Hilfe von Satz 1(ii) der Approximationsfehler für den Fall abgeschätzt werden, daß nur der Stetigkeitsmodul $\omega(f, h)$ bzw. $\omega(f', h)$ bekannt ist.

SATZ 5. *Seien* $n \geqslant 2$, $h > 0$, $I \subset \mathbb{R}$ *ein kompaktes Intervall und* $L_{n,h}: C^j(I) \to C^{n-1}(I)$, $j = 0, 1, 2$. *Dann gelten*

(i) $\| L_{n,h}f - f\|_{\infty,I} \leqslant ((n + 14)/12) \cdot \omega(f, h)$ *für* $f \in C(I)$,

(ii) $\| L_{n,h}f - f\|_{\infty,I} \leqslant (1 + ((n + 2)/12)^{1/2}) \cdot ((n + 2)/12)^{1/2} \times h \cdot \omega(f', h)$ *für* $f \in C^1(I)$ *und*

(iii) $\| L_{n,h}f - f\|_{\infty,I} \leqslant ((n + 2)/12) \cdot h^2 \cdot \| D^2 f\|_{\infty,I}$ *für* $f \in C^2(I)$.

Beweis. Im folgenden werden wir den Wert des Ausdrucks

$$\mu(n, h) := \| L_{n,h}([\pi_1 - x \cdot \pi_0]^2)\|_{\infty,I}^{1/2} \tag{5.1}$$

benötigen, wobei die Norm bzgl. $x \in I$ zu bilden ist. Wegen

$$\begin{aligned} L_{n,h}([\pi_1 - x \cdot \pi_0]^2) &= L_{n,h}(\pi_1{}^2 - 2x \cdot \pi_0 \cdot \pi_1 + x^2 \cdot \pi_0{}^2) \\ &= L_{n,h}(\pi_2 - 2x \cdot \pi_1 + x^2 \cdot \pi_0) \\ &= L_{n,h}\pi_2 - 2x \cdot L_{n,h}\pi_1 + x^2 \cdot L_{n,h}\pi_0 \\ &= \pi_2 + \frac{n+2}{12} \cdot h^2 \cdot \pi_0 - 2x \cdot \pi_1 + x^2 \cdot \pi_0 \end{aligned}$$

gilt

$$L_{n,h}([\pi_1 - x \cdot \pi_0]^2)(x) = x^2 + \frac{n+2}{12} \cdot h^2 - 2x^2 + x^2 = \frac{n+2}{12} \cdot h^2 \tag{5.2}$$

und

$$\mu(n, h) = \left(\frac{n+2}{12}\right)^{1/2} \cdot h. \tag{5.3}$$

ad (i). Da $\{L_{n,h} : C(I) \to C(I)\}$ für $h \to 0$ eine Folge positiver linearer Operatoren ist, die das Monom π_0 reproduzieren, gilt nach [4] für alle $A > 0$ die Abschätzung

$$\| L_{n,h}f - f\|_{\infty,I} \leqslant (1 + A^{-2}) \cdot \omega(f, A \cdot \mu(n, h)).$$

Wir wählen $A := ((n + 2)/12)^{-1/2}$ und erhalten die Behauptung.

ad (ii). Für alle $x, t \in I$ gibt es ein $\xi \in (x, t)$ mit

$$f(t) - f(x) = (t - x) \cdot f'(x) + (t - x) \cdot (f'(\xi) - f'(x)).$$

Weiterhin gilt für $\delta > 0$:

$$|f'(\xi)-f'(x)| \leqslant \omega(f', |\xi-x|) \leqslant \omega(f', |t-x|) = \omega(f', |t-x| \cdot \delta\delta^{-1})$$
$$\leqslant (1+\delta^{-1}\cdot|t-x|)\cdot\omega(f',\delta).$$

Unter Benutzung der Ungleichungen

$$|L_{n,h}(f)| \leqslant L_{n,h}(|f|) \quad \text{und} \quad L_{n,h}(f\cdot g) \leqslant (L_{n,h}(f^2)\cdot L_{n,h}(g^2))^{1/2}$$

folgt nun für $h > 0$:

$$\begin{aligned}
|L_{n,h(t)}(f-f(x)\cdot\pi_0)(x)| &\leqslant |f'(x)\cdot L_{n,h(t)}(t-x)(x)| \\
&\quad + L_{n,h(t)}(|(t-x)\cdot(f'(\xi)-f'(x))|)(x) \\
&= L_{n,h(t)}(|t-x|\cdot|f'(\xi)-f'(x)|)(x) \\
&\leqslant \omega(f',\delta)\cdot L_{n,h(t)}(|t-x| + \delta^{-1}(t-x)^2)(x) \\
&\leqslant \omega(f',\delta)\cdot\{[\pi_0^2(x)\cdot L_{n,h(t)}(t-x)^2\,(x)]^{1/2} \\
&\quad + \delta^{-1}\cdot L_{n,h(t)}(t-x)^2\,(x)\} \\
&= \omega(f',\delta)\cdot(\mu(n,h)+\delta^{-1}\cdot\mu^2(n,h)).
\end{aligned}$$

Mit $A > 0$ setzen wir $\delta := A\cdot\mu(n,h)$ und erhalten

$$\|L_{n,h}f-f\|_{\infty,I} \leqslant (1+A^{-1})\cdot\mu(n,h)\cdot\omega(f', A\cdot\mu(n,h)),$$

woraus für $A := ((n+2)/12)^{-1/2}$ die Behauptung folgt.

ad (iii). Ist $f\in C^2(I)$, so folgt aus $\omega(f',\delta) \leqslant \|f''\|_{\infty,I}\cdot\delta$ und aus der letzten Ungleichung des Beweises von (ii) wegen $\delta = A\cdot\mu(n,h)$

$$\|L_{n,h}f-f\|_{\infty,I} \leqslant (A+1)\cdot\mu^2(n,h)\cdot\|f''\|_{\infty,I}.$$

Weil diese Abschätzung für alle $A > 0$ gilt, ist sie auch noch für die kleinste untere Schranke dieser Werte, nämlich 0, gültig. ∎

Im folgenden werden wir sehen, daß die Fehlerabschätzung in Satz 5(iii) noch um den Faktor 2 verbessert werden kann. Im Gegensatz zum obigen Beweis müssen wir dabei jedoch intensiven Gebrauch von der expliziten Darstellung der Operatoren $L_{n,h}$ und den Eigenschaften von Splines bzgl. äquidistanter Partitionen machen.

SATZ 6. *Seien $n \geqslant 1$, $h > 0$, $j\in\{0,\ldots,n-1\}$, $I\subset\mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $L_{n,h}: C^{j+2}(I)\to C^{n-1}(I)$. Für $f\in C^{j+2}(I)$ gilt dann*

$$\|D^j(L_{n,h}f-f)\|_{\infty,I} \leqslant K(n,j)\cdot h^2\cdot\|D^{j+2}f\|_{\infty,I}$$

mit $K(n,j)=(n+2)/24$ für $j\in\{0,\ldots,n-2\}$ und $K(n,n-1)=(n+3)/24$.

Diese Fehlerabschätzung ist scharf, denn das Gleichheitszeichen gilt für $f = (1/(j+2)!) \cdot \pi_{j+2}$.

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f, d.h. $F' = f$, dann können wir die B-Spline-Koeffizienten von

$$(L_{n,h}f)(x) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} I_{i,h}(f) \cdot B_n\left(\frac{x}{h} - i\right), \; x \in I,$$

darstellen als

$$\begin{aligned} I_{i,h}(f) &= \frac{1}{h} \cdot \int_{(i-1/2)\cdot h}^{(i+1/2)\cdot h} f(t)\,dt = \frac{1}{h} \cdot \left\{F\left(\left(i+\frac{1}{2}\right)\cdot h\right) - F\left(\left(i-\frac{1}{2}\right)\cdot h\right)\right\} \\ &= \frac{1}{h} \cdot \nabla^1 F_{i+1/2}, \qquad i \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{5.4}$$

wobei $\nabla^1 F_{i+1/2}$ die erste rückwärtsgenommene Differenz der Funktion F bzgl. der Partition π und des Punktes $(i + \frac{1}{2}) \cdot h$ bezeichne. Wir wenden nun Lemma 2 an und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d^j}{dx^j}(L_{n,h}f)(x) &= h^{-j} \cdot \sum_{i\in\mathbb{Z}} \nabla^j I_{i,h}(f) \cdot B_{n-j}\left(\frac{x}{h} - i + \frac{j}{2}\right) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} h^{-(j+1)} \cdot \nabla^j \nabla^1 F_{i+1/2} \cdot B_{n-j}\left(\frac{x}{h} - i + \frac{j}{2}\right) \qquad (5.5) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} h^{-(j+1)} \cdot \nabla^{j+1} F_{i+1/2} \cdot B_{n-j}\left(\frac{x}{h} - i + \frac{j}{2}\right), \; x \in I. \end{aligned}$$

Die Differenz $\nabla^{j+1} F_{i+1/2}$ wird aus den Werten der Funktion F an den Partitionspunkten $\{(k + \frac{1}{2}) \cdot h \mid k = i - j - 1, ..., i\}$ gebildet. Wegen $\frac{1}{2} \cdot \{(i - j - 1 + \frac{1}{2}) \cdot h + (i + \frac{1}{2}) \cdot h\} = (i - j/2) \cdot h$ ist der Mittelpunkt $\alpha_i := (i - j/2) \cdot h$ von supp $B_{n-j}(\cdot/h - (i - j/2))$ auch Mittelpunkt des Intervalls $[(i - j - \frac{1}{2}) \cdot h, (i + \frac{1}{2}) \cdot h]$. Um die Koeffizienten $h^{-(j+1)} \cdot \nabla^{j+1} F_{i+1/2}$ durch Werte der Ableitungen $F^{(j+1)} = f^{(j)}$ auszudrücken, entwickeln wir F in eine Taylorreihe um α_i:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{j+2} \frac{F^{(k)}(\alpha_i)}{k!} \cdot (x - \alpha_i)^k + \frac{1}{(j+2)!} \cdot \int_{\alpha_i}^{x} (x-t)^{j+2} \cdot F^{(j+3)}(t)\,dt, \; x \in I. \tag{5.6}$$

Wir beweisen nun eine Zwischenbehauptung, die die Wirkung des Differenzenoperators ∇^{j+1} auf den polynomialen Anteil obiger Summe beschreibt:

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\{t_l = t_0 + l \cdot \Delta \mid \Delta > 0, l = 0, ..., m+1\}$ eine Menge äquidistanter Punkte. Für jedes $p \in \Pi_{m+1}$ gilt dann

$$D^m p\left(t_0 + \frac{m}{2} \cdot \Delta\right) = \Delta^{-m} \cdot \nabla^m p_m. \tag{5.7}$$

Wir können p als Newton'sches Interpolationspolynom bzgl. obiger Knoten darstellen:

$$p(t) = p(t_0) + \sum_{\mu=1}^{m+1} \frac{\nabla^\mu p_\mu}{\mu! \cdot \Delta^\mu} \cdot \prod_{l=0}^{\mu-1} (t - t_l), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Aus

$$\frac{d^m}{dt^m} p(t) = \frac{\nabla^m p_m}{m! \cdot \Delta^m} \cdot m! - \frac{\nabla^{m+1} p_{m+1}}{(m+1)! \cdot \Delta^{m+1}} \cdot \left[(m+1)! \cdot t - m! \cdot \sum_{l=0}^{m} t_l\right], \; t \in \mathbb{R}$$

und

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{m} t_l &= \sum_{l=0}^{m} (t_0 + l \cdot \Delta) = (m+1) \cdot t_0 + \Delta \cdot \sum_{l=0}^{m} l \\ &= (m+1) \cdot t_0 + \Delta \cdot \frac{m(m+1)}{2}\end{aligned}$$

folgt wegen

$$\begin{aligned}&\left[(m+1)! \cdot t - m! \cdot \sum_{l=0}^{m} t_l\right]_{t=t_0+(m/2)\cdot\Delta} \\ &\quad = (m+1)! \cdot t_0 + (m+1)! \cdot \frac{m}{2} \cdot \Delta - (m+1)! \cdot t_0 \\ &\quad\quad - (m+1)! \cdot \frac{m}{2} \cdot \Delta = 0\end{aligned}$$

unsere Zwischenbehauptung.

Damit erhalten wir bei Anwendung von ∇^{j+1} auf F für $i \in \mathbb{Z}$ die Beziehung

$$\begin{aligned}h^{-(j+1)} \cdot \nabla^{j+1} F_{i+1/2} &= F^{(j+1)}(\alpha_i) + \frac{h^{-(j+1)}}{(j+2)!} \cdot \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^{j+1-k} \cdot \binom{j+1}{k} \\ &\quad \times \int_{\alpha_i}^{(i-j+k-1/2)\cdot h} ((i-j+k-\tfrac{1}{2}) \cdot h - t)^{j+2} \cdot F^{(j+3)}(t)\, dt.\end{aligned} \tag{5.8}$$

Nach Einführung der Faktoren $\epsilon_k := \operatorname{sign}((i-j+k-\frac{1}{2}) \cdot h - \alpha_i)$ und von charakteristischen Funktionen für Intervalle formen wir die oben auftretende Summe wie folgt um:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{j+1} (-1)^{j+1-k} \cdot \binom{j+1}{k} \cdot \int_{\alpha_i}^{(i-j+k-1/2)\cdot h} ((i-j+k-\tfrac{1}{2}) \cdot h - t)^{j+2} \cdot F^{(j+3)}(t)\, dt \\ &\quad = \int_{(i-j-1/2)\cdot h}^{(i+1/2)\cdot h} \Bigg\{ \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^{j+1-k} \cdot \epsilon_k \cdot \binom{j+1}{k} \cdot ((i-j+k-\tfrac{1}{2}) \cdot h - t)^{j+2} \\ &\quad\quad \times \chi_{[(i-j+k-1/2)\cdot h,\, \alpha_i]}(t) \Bigg\} \cdot F^{(j+3)}(t)\, dt \\ &\quad =: \int_{(i-j-1/2)\cdot h}^{(i+1/2)\cdot h} \Phi(t) \cdot f^{(j+2)}(t)\, dt.\end{aligned} \tag{5.9}$$

Im folgenden benötigen wir zwei Eigenschaften der so definierten Funktion Φ, und zwar

(i) Φ ist gerade bzgl. $t = \alpha_i$ und

(ii) $\Phi(t) \geqslant 0$ für $t \in [(i - j - \frac{1}{2}) \cdot h, (i + \frac{1}{2}) \cdot h]$,

die nun bewiesen werden sollen.

ad (i): Für $t \in [(i - j - \frac{1}{2}) \cdot h, \alpha_i]$ gilt

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor (j+1)/2 \rfloor} -(-1)^{j+1-k} \cdot \binom{j+1}{k} \cdot ((i - j + k - \tfrac{1}{2}) \cdot h - t)^{j+2} \times \chi_{[(i-j+k-1/2)\cdot h, \alpha_i]}(t).$$

Wir setzen $t = 2\alpha_i - \tau = h \cdot (2i - j) - \tau$ mit $\tau \in [\alpha_i, (i + \frac{1}{2}) \cdot h]$. Wegen $(i - j + k - \frac{1}{2}) \cdot h - t = (k - i - \frac{1}{2}) \cdot h + \tau = (-1) \cdot ((i - k + \frac{1}{2}) \cdot h - \tau)$ und

$$\chi_{[(i-j+k-1/2)\cdot h, \alpha_i]}(t) = 1 \Leftrightarrow (i - j + k - \tfrac{1}{2}) \cdot h \leqslant (2i - j) \cdot h - \tau \leqslant (i - j/2) \cdot h \Leftrightarrow$$
$$-(i - k + \tfrac{1}{2}) \cdot h \leqslant -\tau \leqslant -(i - j/2) \cdot h \Leftrightarrow (i - k + \tfrac{1}{2}) \cdot h \geqslant \tau \geqslant (i - j/2) \cdot h \Leftrightarrow$$
$$\chi_{[\alpha_i, (i+1/2-k)\cdot h]}(\tau) = 1$$

erhalten wir schließlich

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor (j+1)/2 \rfloor} (-1)^k \cdot \binom{j+1}{j+1-k} \cdot ((i - k + \tfrac{1}{2}) \cdot h - \tau)^{j+2} \times \chi_{[\alpha_i, (i-k+1/2)\cdot h]}(\tau) = \Phi(\tau).$$

ad (ii): Wir formen die Darstellung von Φ für $t \in [(i - j - \frac{1}{2}) \cdot h, \alpha_i]$ um:

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= -\sum_{k=0}^{\lfloor (j+1)/2 \rfloor} (-1)^{j+1-k} \cdot \binom{j+1}{k} \cdot ((i - j + k - \tfrac{1}{2}) \cdot h - t)^{j+2} \\ &\quad \times \chi_{[(i-j+k-1/2)\cdot h, \alpha_i]}(t) \\ &= -\sum_{k=0}^{\lfloor (j+1)/2 \rfloor} (-1)^{j+1-k} \cdot \binom{j+1}{k} \cdot (-1)^{j+2} \cdot (t - (i - j + k - \tfrac{1}{2}) \cdot h)_+^{j+2} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor (j+1)/2) \rfloor} (-1)^k \cdot \binom{j+1}{k} \cdot (t - (i - j + k - \tfrac{1}{2}) \cdot h)_+^{j+2}.\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich

$$\Phi'(t) = (j + 2) \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor (j+1)/2 \rfloor} (-1)^k \cdot \binom{j+1}{k} \cdot (t - (i - j + k - \tfrac{1}{2}) \cdot h)_+^{j+1}$$

und

$$\Phi''(t) = (j+2)(j+1) \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor (j+1)/2 \rfloor} (-1)^k \cdot \binom{j+1}{k} \cdot \left(t - \left(i - j + k - \frac{1}{2}\right) \cdot h\right)_+^j$$

$$= (j+2)! \cdot B_j\left(\frac{t-\alpha_i}{h}\right) > 0 \qquad \text{für } t \in \left(\left(i-j-\frac{1}{2}\right) \cdot h, \alpha_i\right].$$

Wegen $\Phi^{(l)}((i-j-\frac{1}{2}) \cdot h) = 0$, $l = 0, 1, 2$, gilt die Behauptung (ii).

Aus der Eigenschaft (ii) folgt nun sofort

$$\int_{(i-j-1/2)\cdot h}^{(i+1/2)\cdot h} |\Phi(t)|\, dt = \int_{(i-j-1/2)\cdot h}^{(i+1/2)\cdot h} \Phi(t)\, dt. \tag{5.10}$$

Für den Wert des letzten Integrals läßt sich zwar ein geschlossener Ausdruck angeben, jedoch können wir diesen wesentlich vereinfachen, wenn wir

$$\int_{(i-j-1/2)\cdot h}^{(i-1/2)\cdot h} \Phi(t)\, dt$$

$$= \int_{(i-j-1/2)\cdot h}^{(i+1/2)\cdot h} \Phi(t) \cdot \frac{d^{j+2}}{dt^{j+2}} \frac{t^{j+2}}{(j+2)!}\, dt$$

$$= (j+2)! \cdot h^{j+1} \cdot \left\{ h^{-(j+1)} \cdot \nabla^{j+1} \left(\frac{\pi_{j+3}}{(j+3)!}\right)_{i+1/2} - \frac{d^{j+1}}{dt^{j+1}} \frac{t^{j+3}}{(j+3)!} \bigg|_{t=\alpha_i} \right\}$$

auf Grund der oben hergeleiteten Beziehung (5.8) schreiben und die auftretende Differenz berechnen. Dazu beweisen wir die folgende Zwischenbehauptung.

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\{t_l = t_0 + l \cdot \Delta \mid \Delta > 0, l = 0, \ldots, m+2\}$ eine Menge äquidistanter Punkte. Für jedes $p \in \Pi_{m+2}$ gilt dann

$$D^m p\left(t_0 + \frac{m}{2} \cdot \Delta\right) = \Delta^{-m} \cdot \nabla^m p_m - \frac{m}{24} \cdot \Delta^2 \cdot p^{(m+2)}\left(t_0 + \frac{m}{2} \cdot \Delta\right). \tag{5.11}$$

Bzgl. dieser Knoten läßt sich p als Newton'sches Interpolationspolynom darstellen:

$$p(t) = p(t_0) + \sum_{\mu=1}^{m+2} \frac{\nabla^\mu p_\mu}{\mu! \cdot \Delta^\mu} \cdot \prod_{l=0}^{\mu-1} (t - t_l), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Der Vieta'sche Wurzelsatz liefert

$$\frac{d^m}{dt^m} p(t) = \frac{\nabla^m p_m}{m! \cdot \Delta^m} \cdot m! + \frac{\nabla^{m+1} p_{m+1}}{(m+1)! \cdot \Delta^{m+1}} \cdot \left[(m+1)! \cdot t - m! \cdot \sum_{l=0}^{m} t_l\right]$$

$$+ \frac{\nabla^{m+2} p_{m+2}}{(m+2)! \cdot \Delta^{m+2}}$$

$$\cdot \left[\frac{(m+2)!}{2} \cdot t^2 - (m+1)! \cdot \sum_{l=0}^{m+1} t_l \cdot t + m! \cdot \sum_{\substack{k,l=0\\k<l}}^{m+1} t_k \cdot t_l\right].$$

Bereits oben wurde gezeigt, daß die erste eckige Klammer für $t = t_0 + (m/2) \cdot \Delta$ verschwindet. Mit der Beziehung (2.6) erhalten wir wegen

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{m+1} t_l &= \sum_{l=0}^{m+1} (t_0 + l \cdot \Delta) = (m+2) \cdot t_0 + \Delta \cdot \sum_{l=1}^{m+1} l \\ &= (m+2) \cdot t_0 + \tfrac{1}{2} \cdot \Delta \cdot (m+1)(m+2)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{m+1} t_l^2 &= \sum_{l=0}^{m+1} (t_0^2 + 2\Delta t_0 \cdot l + \Delta^2 \cdot l^2) \\ &= (m+2) \cdot t_0^2 + 2\Delta t_0 \cdot \sum_{l=1}^{m+1} l + \Delta^2 \cdot \sum_{l=1}^{m+1} l^2 \\ &= (m+2) \cdot t_0^2 + \Delta t_0 (m+1)(m+2) \\ &\quad + \tfrac{1}{6}\Delta^2 (m+1)(m+2)(2m+3)\end{aligned}$$

für die zweite eckige Klammer

$$\begin{aligned}&\left[\frac{(m+2)!}{2} \cdot t^2 - (m+1)! \cdot \sum_{l=0}^{m+1} t_l \cdot t + m! \cdot \sum_{\substack{k,l=0\\k<l}}^{m+1} t_k \cdot t_l\right]_{t=t_0+(m/2)\cdot\Delta} \\ &= \frac{(m+2)!}{2} \cdot \left(t_0^2 + m\Delta t_0 + \frac{m^2}{4} \cdot \Delta^2\right) \\ &\quad - \left((m+2)! \cdot t_0 + \frac{m+1}{2} \cdot \Delta \cdot (m+2)!\right) \cdot \left(t_0 + \frac{m}{2} \cdot \Delta\right) \\ &\quad + \frac{m!}{2} \cdot \Big((m+2)^2 \cdot t_0^2 + \Delta(m+1)(m+2)^2\, t_0 \\ &\quad + \frac{1}{4}\Delta^2 (m+1)^2 (m+2)^2\Big) \\ &\quad - \frac{m!}{2} \cdot \Big((m+2) \cdot t_0^2 + \Delta(m+1)(m+2)\, t_0 \\ &\quad + \frac{1}{6}\Delta^2 (m+1)(m+2)(2m+3)\Big) \\ &= \frac{m!}{2} \cdot t_0^2 \cdot [(m+1)(m+2) - 2(m+1)(m+2) \\ &\quad + (m+2)^2 - (m+2)] \\ &\quad + \Delta \cdot \frac{(m+2)!}{2} \cdot t_0 \cdot [m - m - (m+1) + m + 2 - 1]\end{aligned}$$

$$+ \Delta^2 \cdot \frac{(m+2)!}{24} \cdot [3m^2 - 6m(m+1) + 3(m+1)(m+2)$$
$$- 2(2m+3)]$$
$$= -\frac{m}{24} \cdot (m+2)! \cdot \Delta^2.$$

Aus

$$\frac{d^{m+2}}{dt^{m+2}} p(t) = \frac{\nabla^{m+2} p_{m+2}}{(m+2)! \cdot \Delta^{m+2}} \cdot (m+2)!$$

folgt nun die Zwischenbehauptung, womit wir für das Integral von Φ den Wert

$$\int_{(i-j-1/2)\cdot h}^{(i+1/2)\cdot h} \Phi(t)\, dt = (j+2)! \cdot h^{j+1} \cdot \left\{\frac{1}{2}\alpha_i^2 + \frac{j+1}{24} \cdot h^2 - \frac{1}{2}\alpha_i^2\right\}$$
$$= (j+2)! \cdot \frac{j+1}{24} \cdot h^{j+3} \tag{5.12}$$

erhalten. Nun kann der Approximationsfehler für $x \in I$ abgeschätzt werden:

$$\left| \frac{d^j}{dx^j} (L_{n,h} f)(x) - f^{(j)}(x) \right|$$
$$= \left| \sum_{i \in \mathbb{Z}} h^{-(j+1)} \cdot \nabla^{j+1} F_{i+1/2} \cdot B_{n-j}\left(\frac{x}{h} - i + \frac{j}{2}\right) - f^{(j)}(x) \right|$$
$$= \left| \sum_{i \in \mathbb{Z}} f^{(j)}(\alpha_i) \cdot B_{n-j}\left(\frac{x - \alpha_i}{h}\right) - f^{(j)}(x) \right.$$
$$\left. + \frac{h^{-(j+1)}}{(j+2)!} \cdot \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{(i-j-1/2)\cdot h}^{(i+1/2)\cdot h} \Phi_i(t) \cdot f^{(j+2)}(t)\, dt \cdot B_{n-j}\left(\frac{x - \alpha_i}{h}\right) \right|$$
$$\leqslant \left| \sum_{i \in \mathbb{Z}} f^{(j)}(\alpha_i) \cdot B_{n-j}\left(\frac{x - \alpha_i}{h}\right) - f^{(j)}(x) \right|$$
$$+ \frac{h^{-(j+1)}}{(j+2)!} \cdot \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{(i-j-1/2)\cdot h}^{(i+1/2)\cdot h} |\Phi_i(t)|\, dt \cdot B_{n-j}\left(\frac{x - \alpha_i}{h}\right) \cdot \| f^{(j+2)} \|_{\infty, J}$$
$$= \left| \sum_{i \in \mathbb{Z}} f^{(j)}(\alpha_i) \cdot B_{n-j}\left(\frac{x - \alpha_i}{h}\right) - f^{(j)}(x) \right|$$
$$+ \frac{j+1}{24} \cdot h^2 \cdot \| f^{(j+2)} \|_{\infty, J}, \qquad x \in I.$$

Eine obere Schranke des ersten Summanden dieses Ausdruckes liefert uns

SATZ 7. *Seien* $m \geqslant 1, h > 0$ *und* $\zeta := \{\zeta_i \mid \zeta_{i+1} - \zeta_i = h, i \in \mathbb{Z}\}$ *eine Partition von* $\mathbb{R}$. *Für den durch*

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{m,h} &: C^2(\mathbb{R}) \to C^{m-1}(\mathbb{R})\\ &: \ f \ \to \sum_{i \in \mathbb{Z}} f(\zeta_i) \cdot B_m\left(\frac{\cdot - \zeta_i}{h}\right)\end{aligned}$$

definierten linearen Spline-Operator $\mathscr{L}_{m,h}$ *gilt dann bzgl. des kompakten Intervalls* $I \subset \mathbb{R}$ *die scharfe Fehlerabschätzung*

$$\| \mathscr{L}_{m,h} f - f \|_{\infty,I} \leqslant C(m) \cdot h^2 \cdot \| D^2 f \|_{\infty,I}, f \in C^2(I),$$

mit $C(1) = \frac{1}{8}$ *und* $C(m) = (m+1)/24$ *für* $m \geqslant 2$.

Beweis. (i) $m = 1$: Der Operator erzeugt den interpolierenden Polygonzug bzgl. der Partition ζ. Mithin liefert die Fehlerdarstellung der linearen Lagrange-Interpolation die Behauptung. Da die Funktion $\frac{1}{2}\pi_2$ konvex ist, liegt kein Wert des Splines $\mathscr{L}_{1,h}\frac{1}{2}\pi_2$ unterhalb von $\frac{1}{2}\pi_2$. Sei $x \in I$, dann gibt es genau ein $i \in \mathbb{Z}$ mit $x \in [\zeta_i, \zeta_{i+1})$. Aus der Zweipunkteformel

$$\frac{(\mathscr{L}_{1,h}\frac{1}{2}\pi_2)(x) - \frac{1}{2}\zeta_i^2}{x - \zeta_i} = \frac{\frac{1}{2}\zeta_{i+1}^2 - \frac{1}{2}\zeta_i^2}{\zeta_{i+1} - \zeta_i} = \frac{1}{2} \cdot (\zeta_i + \zeta_{i+1})$$

folgt für die Differenzfunktion

$$\delta(x) = (\mathscr{L}_{1,h}\tfrac{1}{2}\pi_2)(x) - \tfrac{1}{2}\pi_2(x) = \tfrac{1}{2} \cdot (\zeta_i + \zeta_{i+1})(x - \zeta_i) + \tfrac{1}{2}\zeta_i^2 - \tfrac{1}{2}x^2.$$

Diese verschwindet in ζ_i und ζ_{i+1} und nimmt ihr Extremum für $x = \frac{1}{2}(\zeta_i + \zeta_{i+1})$ an:

$$\begin{aligned}\delta(\tfrac{1}{2}(\zeta_i + \zeta_{i+1})) &= \tfrac{1}{4}(\zeta_{i+1}^2 - \zeta_i^2) + \tfrac{1}{2}\zeta_i^2 - \tfrac{1}{8}(\zeta_i^2 + 2\zeta_i\zeta_{i+1} + \zeta_{i+1}^2)\\ &= \tfrac{1}{8}(\zeta_i - \zeta_{i+1})^2 = \tfrac{1}{8}h^2,\end{aligned}$$

d.h. die Fehlerabschätzung ist scharf.

(ii) $m \geqslant 2$: Die Monome $\pi_j, j = 0, 1, 2$, sind für $m \geqslant 2$ im Bildraum von $\mathscr{L}_{m,h}$ enthalten. Nach den Vorbereitungen des Beweises von Satz 1 gilt

$$\begin{aligned}&\pi_j = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (\lambda_i \pi_j) \cdot B_m\left(\frac{\cdot - \zeta_i}{h}\right), \qquad j = 0, 1, 2, \text{ mit}\\ &\lambda_i \pi_0 = 1, \lambda_i \pi_1 = \zeta_i \text{ und } \lambda_i \pi_2 = \zeta_i^2 - \frac{m+1}{12} \cdot h^2, \qquad i \in \mathbb{Z},\end{aligned}$$

woraus folgt, daß $\mathscr{L}_{m,h}$ die Monome π_0 und π_1 reproduziert. Seien nun $x, y \in I$. Dann gibt es ein $\xi(y) \in (x, y)$ derart, daß

$$f(y) = f(x) + f'(x) \cdot (y - x) + \tfrac{1}{2} \cdot f''(\xi(y)) \cdot (y - x^2)$$

gilt. Wir wenden den Operator $\mathscr{L}_{m,h}$ bei konstantem x bzgl. der Variablen y auf f an und erhalten

$$(\mathscr{L}_{m,h}f)(y) = f(x) + f'(x)\cdot(y-x) + \frac{1}{2}\cdot\sum_{i\in\mathbb{Z}} f''(\xi(\zeta_i))\cdot(\zeta_i - x)^2 \times B_m\left(\frac{y-\zeta_i}{h}\right)$$

und damit für $y = x$:

$$\begin{aligned}
|(\mathscr{L}_{m,h}f - f)(x)| &\leqslant \frac{1}{2}\cdot\|f''\|_{\infty,I}\cdot\sum_{i\in\mathbb{Z}}(\zeta_i^2 - 2\zeta_i x + x^2)\cdot B_m\left(\frac{x-\zeta_i}{h}\right)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\|f''\|_{\infty,I}\cdot\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left(\lambda_i\pi_2 + \frac{m+1}{12}\cdot h^2\right)\right.\\
&\qquad\left.\times B_m\left(\frac{x-\zeta_i}{h}\right) - 2x^2 + x^2\right)\\
&= \frac{m+1}{24}\cdot h^2\cdot\|f''\|_{\infty,I}, \qquad x\in I.
\end{aligned}$$

Wegen $D^2(\frac{1}{2}\pi_2) = \pi_0$ ist diese Abschätzung scharf. ∎

Fortsetzung des Beweises von Satz 6.

Aus der letzten Abschätzung und Satz 7 folgt sofort die Fehlerungleichung der Behauptung. Diese ist scharf, denn für $f = (1/(j+2)!)\cdot\pi_{j+2}$ und $x\in I$ gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{d^j}{dx^j}\left(L_{n,h}\frac{1}{(j+2)!}\pi_{j+2} - \frac{1}{(j+2)!}\pi_{j+2}\right)(x)\\
&\quad = \sum_{i\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2}\alpha_i^2\cdot B_{n-j}\left(\frac{x-\alpha_i}{h}\right) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{j+1}{24}\cdot h^2\cdot\sum_{i\in\mathbb{Z}} B_{n-j}\left(\frac{x-\alpha_i}{h}\right)\\
&\quad = \left(C(n-j) + \frac{j+1}{24}\right)\cdot h^2. \quad ∎
\end{aligned}$$

Sei f eine hinreichend oft differenzierbare Funktion. Während wir uns in Satz 6 mit dem Approximationsverhalten der stetigen Ableitungen von $L_{n,h}f$ beschäftigt haben, wollen wir nun abschließend die Konvergenz der nur stückweise stetigen Ableitungen $D^n(L_{n,h}f)$ gegen $f^{(n)}$ für $h\to 0$ untersuchen.

Satz 8. *Seien $n\in\mathbb{N}$, $h>0$, $I\subset\mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $L_{n,h}$: $C^{n+1}(I)\to C^{n-1}(I)$.*

Dann gilt für $f \in C^{n+1}(I)$

$$\| D^n(L_{n,h}f - f)\|_{\infty,I}$$
$$\leqslant \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{(n+2)!} \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} (-1)^k \cdot \binom{n+1}{k} \cdot \left(\frac{n+1}{2} - k\right)^{n+2}\right)$$
$$\times\, h \cdot \| D^{n+1}f \|_{\infty,I}\,.$$

Beweis. Der erste Teil des Beweises von Satz 6 läßt sich mit $j = n$ wörtlich übertragen. Wir entwickeln wieder F, eine Stammfunktion von f, in eine Taylorreihe um α_i, $i \in \mathbb{Z}$, jedoch diesmal nur bis zum Grade $j + 1 = n + 1$:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{F^{(k)}(\alpha_i)}{k!} \cdot (x - \alpha_i)^k + \frac{1}{(n+1)!} \cdot \int_{\alpha_i}^{x} (x - t)^{n+1} \cdot F^{(n+2)}(t)\, dt,\ x \in I. \tag{5.13}$$

Wegen $h^{-m} \cdot \nabla^m p_m = p^{(m)}$ für $m \in \mathbb{N}$ und $p \in \Pi_m$ liefert die Anwendung des Operators ∇^{n+1} auf F für $i \in \mathbb{Z}$ die Beziehung

$$\begin{aligned}
&h^{-(n+1)} \cdot \nabla^{n+1} F_{i+1/2}\\
&= F^{(n+1)}(\alpha_i) + \frac{h^{-(n+1)}}{(n+1)!} \cdot \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \cdot \binom{n+1}{k}\\
&\quad \times \int_{\alpha_i}^{(i-n+k-1/2)\cdot h} \left(\left(i - n + k - \frac{1}{2}\right) \cdot h - t\right)^{n+1} \cdot F^{(n+2)}(t)\, dt\\
&= f^{(n)}(\alpha_i) - \frac{h^{-(n+1)}}{(n+2)!} \cdot \int_{(i-n-1/2)\cdot h}^{(i+1/2)\cdot h} \Phi'(t) \cdot f^{(n+1)}(t)\, dt,
\end{aligned} \tag{5.14}$$

wobei Φ die bzgl. $j = n$ im Beweis von Satz 6 definierte Funktion ist. Damit gilt für $x \in I$

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{d^n}{dx^n} (L_{n,h}f)(x) - f^{(n)}(x) \right|\\
&= \left| \sum_{i \in \mathbb{Z}} h^{-(n+1)} \cdot \nabla^{n+1} F_{i+1/2} \cdot B_0\left(\frac{x - \alpha_i}{h}\right) - f^{(n)}(x) \right|\\
&\leqslant \left| \sum_{i \in \mathbb{Z}} f^{(n)}(\alpha_i) \cdot B_0\left(\frac{x - \alpha_i}{h}\right) - f^{(n)}(x) \right|\\
&\quad + \frac{h^{-(n+1)}}{(n+2)!} \cdot \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{(i-n-1/2)\cdot h}^{(i+1/2)\cdot h} | \Phi_i'(t) |\, dt \cdot B_0\left(\frac{x - \alpha_i}{h}\right) \cdot \| f^{(n+1)} \|_{\infty,I}\,.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Zu $x \in I$ existiert genau ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $x \in [\alpha_m - h/2, \alpha_m + h/2)$, woraus für $x \in (\alpha_m - h/2, \alpha_m + h/2)$ die Abschätzung

$$\left| \sum_{i \in \mathbb{Z}} f^{(n)}(\alpha_i) \cdot B_0\left(\frac{x-\alpha_i}{h}\right) - f^{(n)}(x) \right|$$
$$= | f^{(n)}(\alpha_m) - f^{(n)}(x) | \leqslant \| f^{(n+1)} \|_{\infty,I} \cdot | \alpha_m - x | \leqslant \frac{h}{2} \cdot \| f^{(n+1)} \|_{\infty,I} \tag{5.16}$$

und für $x = \alpha_m - (h/2)$ die Ungleichung

$$\left| \sum_{i \in \mathbb{Z}} f^{(n)}(\alpha_i) \cdot B_0\left(\frac{x-\alpha_i}{h}\right) - f^{(n)}(x) \right|$$
$$= \left| \frac{1}{2}\,(f^{(n)}(\alpha_{m-1}) - f^{(n)}(x)) + \frac{1}{2}\,(f^{(n)}(\alpha_m) - f^{(n)}(x)) \right|$$
$$\leqslant \frac{1}{2} \cdot \| f^{(n+1)} \|_{\infty,I} \cdot \left(\left| \alpha_{m-1} - \alpha_m + \frac{h}{2} \right| + \left| \alpha_m - \alpha_m + \frac{h}{2} \right| \right)$$
$$= \frac{h}{2} \cdot \| f^{(n+1)} \|_{\infty,I} \tag{5.17}$$

folgen. Im Beweis von Satz 6 wurde gezeigt, daß Φ gerade bzgl. $t = \alpha_i$, $\Phi'((i-n-\frac{1}{2}) \cdot h) = 0$ sowie $\Phi''(t) > 0$ für $t \in ((i-n-\frac{1}{2}) \cdot h, \alpha_i]$ ist. Mithin gilt $\Phi'(t) \geqslant 0$ für $t \in [(i-n-\frac{1}{2}) \cdot h, \alpha_i]$ und Φ' ist ungerade bzgl. $t = \alpha_i$, allerdings nicht stetig in α_i. Wir können nun das obige Integral berechnen:

$$\int_{(i-n-1/2)\cdot h}^{(i+1/2)\cdot h} | \Phi'(t) | \, dt$$
$$= 2 \cdot \int_{(i-n-1/2)\cdot h}^{\alpha_i} \Phi'(t) \, dt$$
$$= 2 \cdot (n+2) \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} (-1)^k \cdot \binom{n+1}{k}$$
$$\times \int_{(i-n+k-1/2)\cdot h}^{(i-n/2)\cdot h} \left(t - \left(i - n + k - \frac{1}{2} \right) \cdot h \right)^{n+1} dt$$
$$= 2 \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} (-1)^k \cdot \binom{n+1}{k} \cdot \left(\frac{n+1}{2} - k \right)^{n+2} \cdot h^{n+2}. \tag{5.18}$$

Unter Verwendung obiger Abschätzungen erhalten wir durch Zusammenfassen aller Terme die Behauptung. ∎

Literatur

1. C. de Boor und G. J. Fix, Spline approximation by quasi-interpolants, *J. Approximation Theory* **8** (1973), 19–45.

2. S. KARLIN UND J. M. KARON, A variation-diminishing generalized spline approximation method, *J. Approximation Theory* **1** (1968), 255–268.
3. M. J. MARSDEN, An identity for spline functions with applications to variation-diminishing spline approximation, *J. Approximation Theory* **3** (1970), 7–49.
4. B. MOND, On the degree of approximation by linear positive operators, *J. Approximation Theory* **18** (1976), 304–306.
5. M. W. MÜLLER, Degree of L_p-approximation by integral Schoenberg splines, *J. Approximation Theory* **21** (1977), 385–393.
6. I. J. SCHOENBERG, Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, Parts A and B, *Quart. Appl. Math.* **4** (1946), 45–99, 112–141.
7. I. J. SCHOENBERG, On Variation Diminishing Approximation Methods, *in* "On Numerical Approximation" (R. E. Langer, Ed.), pp. 249–274, (MRC Symposium), Univ. of Wisconsin Press, Madison, 1959.
8. I. J. SCHOENBERG, On Spline Functions, *in* "Inequalities" (O. Shisha, Ed.), pp. 255–291 (Symposium at Wright–Patterson Air Force Base), Academic Press, New York, 1967.